1.Probabilidades

1.1. Introdução

- **Estatística**: Termo com vários significados. Como ciência estuda as características de determinada população a partir da observação de uma amostra.
- Por que é que estatística é necessária? Serve para dar apoio e recomendações ao processo de tomada de decisão sob incerteza.
- Num contexto empresarial, estatística ajuda a responder ao seguinte tipo de perguntas:
  - Qual é a probabilidade das vendas diminuírem se aumentarmos os preços?
  - Qual é a probabilidade de um novo método de montagem aumentar a produtividade?
  - Qual é a probabilidade de um projeto ser concluído a tempo?
  - Qual é a probabilidade de um novo investimento ser lucrativo?

- Os primórdios da área de investigação em **estatística** podem ser encontrados nos estudos do século XVI em probabilidades motivados pelo interesse em jogos de azar. Os pioneiros do estudo em probabilidades neste contexto foram Gerolamo Cardano , (1501-1576) , Pierre de Fermat (1607-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

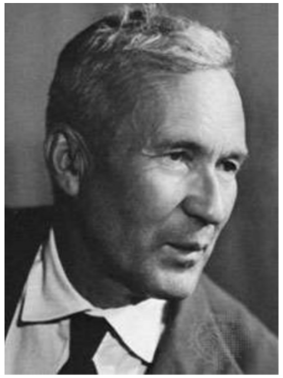
Girolamo Cardano


Pierre de Fermat


Blaise Pascal

- A teoria desenvolvida para “caras ou coroas" ou "vermelho ou preto" encontrou aplicações em economia, gestão, física, biologia, psicologia, etc.

- Ao longo dos tempos os estudiosos perceberam que a forma mais rigorosa de ter em conta a **incerteza** em seus estudos consiste em recorrer a conceito de **probabilidade**.
- Um grande número de autores contribuiu para a teoria de probabilidades. A formulação moderna desta teoria deve-se a Andrey Kolmogorov (1904-1987)



Andrey Kolmogorov

- A probabilidade é uma medida numérica que mede o grau de incerteza associado à ocorrência de um acontecimento. Os valores de probabilidade sempre são atribuídos em uma escala de 0 a 1:
  - Um valor perto de 1 significa que o acontecimento ocorre quase certamente
  - Um valor perto de zero significa que o acontecimento não ocorre quase certamente
  - Um valor de 0.5 significa que a ocorrência do acontecimento é tão provável como improvável.

Uma vez que as probabilidades estão associadas com a ocorrência ou não ocorrência de acontecimentos, é necessário primeiro definir o conceito de acontecimento e outros termos relacionados nomeadamente experiência aleatória e espaço-amostra.

1.2. Experiência aleatória, espaço de resultados e acontecimentos

Definição – Experiência aleatória é qualquer procedimento que pode (pelo menos em teoria) ser repetido um número infinito de vezes e que satisfaz os seguintes requisitos:

- O conjunto dos resultados possíveis é conhecido antecipadamente.
- O resultado da experiência nunca pode ser previsto de forma exata, mesmo que se desenvolvam todos os esforços controlar as circunstâncias relevantes para o resultado
  - Exemplos: Baralho de cartas, euromilhões, ….

- **Definição – Espaço de resultados ou espaço-amostra, Ω**
  Conjunto fundamental (não vazio) formado por todos os resultados que é possível obter quando se efetua determinada experiência aleatória. Os resultados individuais, pontos ou elementos de Ω, são representados por ω.

- Tendo em conta a natureza do conjunto Ω , os espaços de resultados podem classificar-se do seguinte modo:
  - a) Discretos (finitos ou infinitos numeráveis);
  - b) Contínuos (infinitos não numeráveis).

- **Definição – Acontecimento**
  Chama-se acontecimento a um subconjunto do espaço Ω .

- **Acontecimentos elementares:** subconjuntos $\{\omega\} \subset \Omega$ formados por um só elemento.

- Como qualquer conjunto é subconjunto de si próprio tem-se que Ω é um acontecimento.

- **Definição– Realização de um acontecimento.**
  Ao efetuar a experiência aleatória associada com Ω , diz-se que o acontecimento $A \subset \Omega$ se realiza, se o resultado da experiência é um ponto que pertence a A.

Exemplo 1.1 : Lançam-se 2 dados e observa-se o número de pontos saído no primeiro dado, i, e no segundo, j.

O espaço de resultados é então, $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$.

Existem 36 acontecimentos elementares e podem definir-se, entre outros, os acontecimentos:

- $A = \{(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\} \equiv$«saída de apenas 4 ou 5 pontos»;
- $B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\} \equiv$«saída de soma de pontos inferior a 5».

Representar graficamente o espaço de resultados e os acontecimentos A e B.

Definir o acontecimento C =«saída de dois valores iguais nos dados» e representá-lo.

Álgebra dos acontecimentos (análoga à álgebra dos conjuntos)

- **Implicação de acontecimentos** – a realização de A implica a realização de B se e só se, qualquer elemento de A é elemento de B ($A \subset B$).
- **Identidade de acontecimentos –** A e B são acontecimentos idênticos se e só se, possuem os mesmos elementos ($A = B$).

  Note-se que $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$
- **União de acontecimentos:** $A \cup B$
- **Intersecção de acontecimentos:** $A \cap B$
- Dois acontecimentos A e B são **incompatíveis** ou **mutuamente exclusivos** se e só se $A \cap B = \varnothing$.
- **Acontecimento impossível:** $\varnothing$ (conjunto vazio),
- **Diferença de acontecimentos:** $A - B$.
- Acontecimento **contrário** ou **complementar** de A é o acontecimento que se realiza se e só se A não se realiza $\bar{A} = \Omega - A$. $A \cap \bar{A} = \varnothing$ e $A \cup \bar{A} = \Omega$.

- **Propriedades das operações definidas sobre acontecimentos.**

1)Associatividade: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

2)Comutatividade: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3)Distributividade: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4) Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ e $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

"o contrário da união é a intersecção dos contrários" e "o contrário da intersecção é a união dos contrários". Operações sobre infinidades **numeráveis** de acontecimentos.

- A **união numerável** de $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ é o acontecimento $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ que se realiza se e só se pelo menos um A_j se realiza;

- A **intersecção numerável** de $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ é o acontecimento $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ que se realiza se e só se todos os A_j se realizam;

Estas operações verificam as propriedades da associatividade, comutatividade, distributividade de uma em relação à outra e as leis de De Morgan.

3. Medida de probabilidade. Axiomática de Kolmogorov.

- Probabilidade: medida do grau de incerteza de um acontecimento.
- A teoria da probabilidade ensina a **calcular a probabilidade de certos acontecimentos a partir das probabilidades de outros acontecimentos**. **Não ensina a atribuir as probabilidades "originais"**

- **Definição – Medida de probabilidade.**
  A medida de probabilidade é uma função P que a cada acontecimento A, $A \subset \Omega$, faz corresponder um número real, $P(A)$, probabilidade do acontecimento A, que verifica os três axiomas seguintes:

  P1 – $P(A) \geq 0$.

  P2 – $P(\Omega) = 1$.

  P3 – Se A e B forem acontecimentos incompatíveis, $A \cap B = \varnothing$, então,
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

  P3* – Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forem acontecimentos em número infinito numerável, dois a dois incompatíveis, $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$, então,
  $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$.

Propriedades da medida de probabilidade:

1) $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
2) $P(\varnothing) = 0.$
3) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B).$
4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$
5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$
6) $P(A) \leq 1.$

A propriedade 2 estabelece que o **acontecimento impossível tem probabilidade igual a zero**.

Contudo, **nada impede que se encontrem acontecimentos com probabilidade nula que não sejam impossíveis** (o próximo capítulo ajudará a esclarecer esta questão).

Exemplo 1.2. Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista A, 22.9% a revista B e 5.1% ambas as revistas. Admite-se que a medida de probabilidade é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas. Sejam:

Acontecimentos $A \equiv$ «adquirir a revista A»;

$B \equiv$ «adquirir a revista B».

(a) A probabilidade de adquirir somente a revista A:

(b) A probabilidade de adquirir pelo menos uma das revistas:

(c) A probabilidade de não adquirir nem a revista A, nem a revista B

1.4. Interpretações do conceito de probabilidade.

- **Interpretação clássica** → resultados "igualmente possíveis ou prováveis".

Ω finito, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, e admita-se $P(\omega\ ) = 1/n$, $i = 1,2,\ldots, n$.

Seja $A = \{\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}, \ldots, \omega_{\alpha_m}\}$ então

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{\text{nº de casos favoráveis a } A}{\text{nº de casos possíveis}}$$

Esta definição deve-se a Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Pierre Simon Laplace

- **Examplo 1.3:** Qual é a probabilidade de se retirar um às de um baralho de um baralho de 52 cartas?

- **Exemplo 1.4:** Voltar ao exemplo 1.1. (lançamento de 2 dados) e calcular as probabilidades de A, B e C

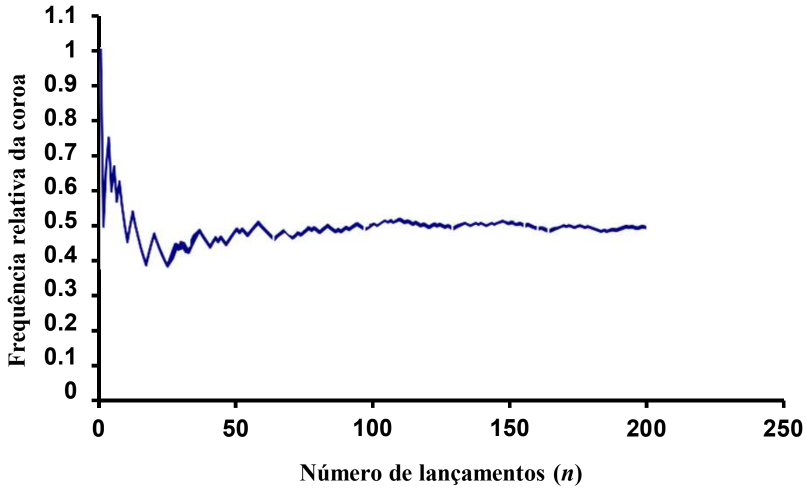
- **Interpretação frequencista** → a probabilidade de um acontecimento define-se como o limite da frequência relativa numa sucessão infinita de provas idênticas e independentes, $f_n(A) = F_n(A)/n$.

  Quando n aumenta, verifica-se empiricamente que a **frequência relativa** tende a **estabilizar** em torno de um número que os frequencistas tomam como $P(A)$.

  Pode então dizer-se que, qualquer que seja $\varepsilon > 0$,
  $\lim_{n\to\infty} P\left(|f_n(A) - P(A)| < \varepsilon \right) = 1$ (**lei dos grandes números**)

  Note-se também que, fixado n, as frequências relativas verificam a axiomática de Kolmogorov.

- **Exemplo 1.5:** (interpretação frequencista) Lançou-se 200 vezes uma moeda ao ar de aparência regular e registou-se ao fim de cada lançamento a frequência relativa do acontecimento $A \equiv$ «saída da coroa».



- **Interpretação subjetiva** ou personalista –

Se **a situação não é repetitiva** – é-se levado a atribuir probabilidades a acontecimentos ou a conjeturas surgidas nesse contexto, recorrendo à **interpretação subjetiva** ou personalista.

Exemplos:

- «A rendabilidade do projeto P é superior a x%».
- «Com este plano de *marketing* a empresa E pode alcançar dentro de dois anos um volume de vendas de aproximadamente y milhares de Euros».
- «A taxa de inflação vai situar-se, no próximo ano, 1% acima da registada no ano corrente».

Um indivíduo, com determinada informação e certas características pessoais, poderá exprimir o **grau de credibilidade** que associa a cada uma destas conjeturas, atribuindo-lhe determinada probabilidade. A probabilidade subjetiva constitui, assim, uma aproximação quantitativa à credibilidade que se atribui a determinado acontecimento.

Na fixação de probabilidades subjetivas torna-se fundamental respeitar o **princípio da coerência**, isto é, garantir que o sistema de graus de credibilidade que se vai fixar respeita a axiomática de Kolmogorov .

1.5. Métodos de contagem

- **Definição – Regra fundamental da contagem**

Suponha-se que uma experiência aleatória é composta por k etapas. Se na primeira etapa há m_1 casos possíveis, na segunda etapa há m_2 casos possíveis,…, na k-ésima etapa há m_k casos possíveis, então, o número total de resultados da experiência aleatória, combinando as k etapas, é $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$.

Conceitos de **análise combinatória** a ter presentes:

- **Arranjos.** A partir de um conjunto com n elementos distintos, quantos grupos com k elementos $(1 \leq k \leq n)$ que **diferem pela natureza e pela ordem** desses elementos se podem formar?

$$A_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Arranjos completos.** Quando nos arranjos entram **elementos repetidos** do conjunto dado diz-se que se trata de arranjos com repetição ou arranjos completos, $\alpha_k^n = n^k$.

- **Permutações**. As permutações de um conjunto de n elementos são arranjos de n elementos tomados n a n, isto é, cada grupo é formado por todos os elementos do conjunto. O número de permutações de n elementos, P_n, é então

$$P_n = A_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

- **Combinações**. A partir de um conjunto com n elementos distintos, quantos grupos com k elementos ($1 \leq k \leq n$) que **diferem pela sua natureza, mas não pela ordem** com que foram seleccionados, se podem formar?

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

- **Permutações de elementos não todos distintos**. Dados n elementos dos quais k_1 são de um primeiro tipo e não se distinguem entre si, k_2 são de um segundo tipo e não se distinguem entre si e, finalmente, k_r são de um último tipo, também indistintos, havendo no total r tipos diferentes com, $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, o número de permutações de n elementos não todos distintos é dado pela expressão,

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$ **(Coeficiente multinomial)**

Quando se consideram apenas dois grupos, isto é, $r = 2,$ tem-se

$$\frac{n!}{k_1!k_2!} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \binom{n}{k_1} = \binom{n}{k_2}$$ **(Coeficiente binomial)**

Uma aplicação particularmente importante da análise combinatória consiste na resolução do seguinte problema: considere-se uma população com N elementos, dos quais M possuem determinado atributo. Escolhida uma amostra com n elementos $(n \geq 0)$, qual a probabilidade de nela se encontrarem x elementos com o referido atributo $(0 \leq x \leq n)$? A resposta à pergunta depende da tiragem ser feita sem ou com reposição.

- Tiragem sem reposição $\rightarrow$ **esquema hipergeométrico**.

  número de casos possíveis: combinações de N elementos tomados n a n.

  número de casos favoráveis: a população possui M elementos com o atributo em estudo e, portanto, $N - M$ sem este atributo; a amostra tem x elementos com o referido atributo e, portanto $n - x$ sem ele. Então o nº de casos favoráveis é,

$$\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$$

  Supondo que $x \geq \max\{0, n-(N-M)\}$ e $x \leq \min\{n, M\}$, a probabilidade vem

$$P_s = \binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$$

- **Exemplo** – Considere-se uma população de 100 computadores dos quais 10 sofrem de determinada avaria. Escolhida aleatoriamente, **sem reposição**, uma amostra de 5 computadores qual a probabilidade de nenhum estar avariado?

- Tiragem com reposição → **esquema binomial**. O resultado vem

$$P_r = \frac{M^x (N-M)^{n-x} \binom{n}{x}}{N^n} = \binom{n}{x} \frac{M^x}{N^x} \frac{(N-M)^{n-x}}{N^{n-x}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

onde $p = M/N$ é a proporção do atributo na população.
No esquema binomial, apenas interessa aquela **proporção** e não os valores de N e de M.

- **Exemplo1.6:** Retome-se o exemplo da página anterior considerando uma tiragem **com reposição.**

1.6. Probabilidade condicionada.

- **Exemplo1.7:** Lançam-se 2 dados, um vermelho e outro verde, estando-se interessado na soma de pontos obtida.

  Acontecimento A = « obter uma soma igual a 5 pontos»

$$P(A) = 4/36 = 1/9.$$

No entanto, se se souber que no dado verde se obteve 4 pontos, acontecimento B, a probabilidade de A deve ser reavaliada, já que nesse caso a realização de A equivale agora a obter 1 ponto com o dado vermelho.

Como a probabilidade de A é agora calculada depois de saber que B se realizou, tem-se a **probabilidade condicionada** $P(A|B) = 1/6$.

- **Definição– Probabilidade condicionada**

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{se} \quad P(B) > 0.$$

- A probabilidade condicionada é uma medida de probabilidade (verifica os axiomas);
- A probabilidade condicionada pode interpretar-se como uma reavaliação da probabilidade de um acontecimento quando se tem a informação de que outro acontecimento se realizou. Uma vez conhecida a realização desse outro acontecimento, B, o espaço de resultados deixa de ser Ω e passa a ser B.

Exemplo 1.8: Suponhamos que nos são dados 20 bolbos de tulipas muito semelhantes e nos foi dito que 8 florescerão cedo e 13 serão vermelhas de acordo com as seguintes combinações:

	Florescer		Total
Cor	Cedo	Tarde	
Vermelha	5	8	13
Amarela	3	4	7
Total	8	12	20

Se um bolbo for escolhido aleatoriamente, qual é a probabilidade da tulipa vir a ser vermelha?

Suponhamos que um exame detalhado ao bolbo revela que este vai florescer cedo. Qual é a probabilidade do bolbo vir a produzir uma tulipa vermelha, sabendo que este floresce cedo?

• **Regra da multiplicação das probabilidades:**

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B) = P(A) \times P(B \mid A) \quad \text{com } P(B) > 0 \text{ e/ou } P(A) > 0$$

Esta regra generaliza-se facilmente para três ou mais acontecimentos. Por exemplo, se $P(A \cap B) > 0$,

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B \mid A) \times P(C \mid A \cap B).$$

Exemplo 1.9: Quatro cartas são retiradas sucessivamente (aleatoriamente e sem reposição) de um baralho de cartas. Qual a probabilidade de receber primeiro uma carta de espadas (E) e depois uma de copas (C)?

Calcule a probabilidade de receber uma carta de espadas (E), uma carta de copas (C), uma carta de diamantes (D) e uma carta de paus (P) exatamente por esta ordem.

1.7. Teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

- **Definição – Partição do espaço de resultados**

  Diz-se que a classe de acontecimentos $\{A_1, A_2, \dots, A_m, \dots\}$ é uma partição de Ω quando,

$$A_i \cap A_j = \varnothing,\ (i \neq j) \text{ e } \bigcup_j A_j = \Omega$$

É imediata a seguinte propriedade das partições (axioma P3*):

$$P\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j P(A_j) = 1$$

- **Teorema (da probabilidade total)** – Se $\{A_1, A_2, \dots, A_m, \dots\}$ é uma partição de Ω e se $P(A_j) > 0$, $(j = 1, 2, \dots, m, \dots)$, vem, para qualquer acontecimento B,

$$P(B) = \sum_{j=1} P(A_j) P(B \mid A_j)$$

Note-se que $\quad P(B) = \sum_{j=1} P(A_j) P(B \mid A_j) = \sum_{j=1} P(A_j \cap B)$

Exemplo 1.10: Os membros de uma empresa de consultoria alugam carros de três agências de aluguer de automóveis: 60 por cento da Agência de 1, 30 por cento da Agência 2, e 10 por cento da Agência 3. Se 9 por cento dos carros da Agência 1 precisam de uma mudança de óleo, 20 por cento dos carros da Agência 2 precisam de uma mudança de óleo, e 6 por cento dos carros da Agência 3 precisam de uma mudança de óleo, qual é a probabilidade de que um carro alugado entregue à empresa de consultadoria vai precisar de uma mudança de óleo?

Teorema (Bayes) – Se $\{A_1, A_2,..., A_m,...\}$ é uma partição de Ω e se $P(A_j) > 0$ ($j = 1,2,\ldots, m,\ldots$), vem, para qualquer acontecimento B a verificar $P(B) > 0$,

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad j = 1,2,..., m,...$$

Exemplo 1.11: Uma companhia seguradora distribui os segurados por três classes, A_1, A_2, A_3, consoante o menor ou o maior risco que lhes atribui; em certo momento, a carteira de apólices é tal que $P(A_1) = 0.35$, $P(A_2) = 0.50$ e $P(A_3) = 0.15$. Sabe-se também que a probabilidade de os segurados de cada classe terem um ou mais acidentes durante um ano é, respectivamente, 0.01, 0.04 e 0.15. A companhia, naturalmente, nunca tem a certeza de conhecer a classe a que pertence o subscritor de uma apólice.
Se um segurado tiver um ou mais acidentes durante um ano, que conclusões podem retirar-se quanto à classe a que pertence?

1.8. Acontecimentos independentes

- **Definição– Acontecimentos independentes**

  Dois acontecimentos A e B, do mesmo espaço de resultados, dizem-se independentes, se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- A definição é válida para $P(A) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Assim, se A for tal que $P(A) = 0$, então A é independente de qualquer outro acontecimento e, em particular, é independente de $\varnothing$ e de Ω.

Exemplo 1.12: Uma moeda é lançada ao ar duas vezes e observamos a sequência de caras (F) e coroas (C).

$$\Omega = \{FF, FC, CF, CC\}$$

Considere os acontecimentos:

A = {Caras no primeiro lançamento} = {FF, FC}

B = {Coroas no segundo lançamento} = {FC, CC}

C = {Coroas em ambos os lançamentos} = {CC}

Mostre que

- Os acontecimentos B e C não são independentes.
- Os acontecimentos A e C não são independentes.
- Os acontecimentos A e B são independentes.

- **Teorema–** Se A e B forem acontecimentos independentes, então,

$$P(A \mid B) = P(A) \quad \text{se} \quad P(B) > 0,$$
$$P(B \mid A) = P(B) \quad \text{se} \quad P(A) > 0.$$

Acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis traduzem relações diferentes:

- Se $P(A) = 0$, A é independente de qualquer outro acontecimento.
- A concorrência das duas situações (independência e incompatibilidade) somente se verifica nessa hipótese restrita.
- Se $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, os acontecimentos A e B, caso sejam incompatíveis **não podem ser independentes**, já que $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B) > 0$.

- **Teorema–** Se os acontecimentos A e B são independentes, também o são A e $\bar{B}$, $\bar{A}$ e B, $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Quando se consideram **três acontecimentos**, A, B e C, a **situação complica-se**. Podem ocorrer as seguintes situações:

- Os acontecimentos são dois a dois independentes e

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C).$$

- Os acontecimentos são dois a dois independentes e

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

- Verifica-se que, $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, mas, por exemplo, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

- **Definição – Independência completa ou mútua**

  Os acontecimentos A, B e C do mesmo espaço de resultados dizem-se completamente independentes ou mutuamente independentes se e só se verificarem as condições seguintes:

  - $P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap C) = P(A)P(C), P(B \cap C) = P(B)P(C),$
  - $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$

(Independentes 2 a 2 e independentes 3 a 3)

Exemplo 1.13: Uma caixa tem 4 bolas (1, 2, 3, 4). Duas bolas são retiradas (cada uma com reposição) e os números observados.
Considere os acontecimentos $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, $C = \{1,4\}$.
Mostre que:

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$,
2. $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$,
3. $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$

Exemplo 1.14: Uma moeda é lançada 3 vezes e observamos a sequência de caras (F) e coroas (C).
O espaço de resultados é

$$\Omega = \{FFF, FFC, FCF, CFF, FCC, CFC, CCF, CCC\}$$

Considere os acontecimentos $A=\{FFF,CFF,FCC,CCC\}$, $B=\{FFC,FCF,CFF,CCC\}$ e $C=\{FFF,CFF,FFC,CCF\}$.

Mostre que:

1. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;
2. $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

Exemplo 1.15: Uma moeda é lançada 3 vezes e observamos a sequência de caras (F) e coroas (C). O espaço de resultados é

$$\Omega = \{FFF, FFC, FCF, CFF, FCC, CFC, CCF, CCC\}$$

Considere os acontecimentos A={CCC,FCC,CFF,FFF}, B={CCF,CFC, FFC, FFF} e C={CCF, CFC, FCF, FFF}

Mostre que

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ mas $P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$

- **Definição – Independência condicional**

  Dois acontecimentos A e B são independentes condicionalmente em relação a um acontecimento C quando,

  $$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C).$$

  A independência condicional **não** implica independência no sentido corrente a não ser obviamente quando $C = \Omega$.